ＡＢＣ予想Ⅲ

東森秀朋　2023.10.01

ＡＢＣ予想は，下記等式(1.1)及び不等式(1.2)を成立させる自然数A，B及びCは存在するが，不等式(1.3)を成立させる自然数A，B及びCは存在しない，と云うものである．

pは素数(≥ 5)　rは自然数　自然数A，B及びCは互いに素

$$A + B = C \tag{1.1}$$

$$rad(ABC) < C \tag{1.2}$$

$$rad(ABC)^2 < C \tag{1.3}$$

$$A = p = rad(A) = C - B \qquad rad(BC) = r$$

不等式(1.2)が成立するには，次の不等式が成立しなければならない．

$$rad(ABC) = pr < C \qquad p < \frac{1}{r}C$$

不等式(1.3)が成立するには，次の不等式が成立しなければならない．

$$rad(ABC)^2 = p^2r^2 < C \qquad p < \frac{1}{r}C^{\frac{1}{2}}$$

等式(1.1)そして不等式(1.2)及び(1.3)を成立させる素数pの最大値は，$rad(BC) = r$の最小値により決定される．

ところが，rの最小値は，B及びCが2又は3のべき乗であるときで，6である．

そうすると，等式(1.1)は次のように書き換えられる．

$$p + 3^j = 2^n \qquad p + 2^n = 3^j \tag{1.4}$$

不等式(1.2)及び(1.3)が成立するためには次の不等式が成立しなければならない．

$$rad(BC) = 2 \times 3 = r = 6$$

$$rad(ABC) = 6p < C \qquad p < \frac{1}{6}C \tag{1.5}$$

$$rad(ABC)^2 = 36p^2 < C \qquad p < \frac{1}{6}C^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

以上のとおり，ＡＢＣ予想は，上記等式(1.4)及び不等式(1.5)を成立させる素数p，自然数j及びnは無限に存在するが，不等式(1.6)を成立させる素数p，自然数j及びnは存在しない，と言い換えられる．

以下に，上記ＡＢＣ予想を証明する．

下記不等式を成立させる実数m，δそしてα は必ず存在する．

$$e^m < B < e^{m+\delta} \qquad e^{m+\alpha} < C < e^{m+\alpha+\delta}$$

そのとき，下記不等式が成立する．

$$e^{m+\alpha} - e^{m+\delta} < C - B = p < e^{m+\alpha+\delta} - e^m$$
$$e^m(e^\alpha - e^\delta) < p < e^m(e^{\alpha+\delta} - 1)$$
$$0 < p = C - B \qquad e^\alpha - e^\delta = \beta > 0 \qquad \beta\text{は実数}$$
$$\beta e^m < p < e^m(e^{\alpha+\delta} - 1)$$

δが極めて小さいとき，次の不等式が成立する．

$$\beta e^m \approx \beta B < p < e^m(e^{\alpha+\delta} - 1)$$

そうすると，次の不等式が成立する．

$$\beta B = \beta(C - p) < p$$
$$\beta C < p + \beta p = (1 + \beta)p$$
$$\frac{\beta}{1+\beta} C < p$$

ところが，ＡＢＣ予想が成立するとき，下記不等式(1.6)は成立しない．

$$rad(ABC)^2 = 36p^2 < C \qquad p < \frac{1}{6} C^{\frac{1}{2}} \qquad (1.6)$$

そうすると，次の不等式が成立しない．

$$\frac{\beta}{1+\beta} C < \frac{1}{6} C^{\frac{1}{2}}$$
$$(\frac{\beta}{1+\beta})^2 C^2 < \frac{1}{36} C$$
$$C < \frac{1}{36} (\frac{1+\beta}{\beta})^2$$

自然数Cの大きさに制限はないから，上記不等式は成立しない．
したがって，ＡＢＣ予想は成立する．

下記の 5 例では，不等式(1.2)は成立するが，不等式(1.3)は成立しない．

例１

$A = 5 \qquad B = 3^3 = 27 \qquad C = 2^5 = 32$

$rad(A) = 5 \qquad rad(B) = 3 \qquad rad(C) = 2$

$rad(ABC) = 5 \times 2 \times 3 = 30 < 32 = 2^5 = C$

例２

$A = 13 \qquad B = 3^5 = 243 \qquad C = 2^8 = 256$

$rad(A) = 13 \qquad rad(B) = 3 \qquad rad(C) = 2$

$rad(ABC) = 13 \times 2 \times 3 = 78 < 256 = 2^8 = C$

例３

$A = 139 \qquad B = 2^{11} = 2048 \qquad C = 3^7 = 2187$

$rad(A) = 139 \qquad rad(B) = 2 \qquad rad(C) = 3$

$rad(ABC) = 139 \times 2 \times 3 = 834 < 2187 = 3^7 = C$

例４

$A = 6487 \qquad B = 3^{10} = 59049 \qquad C = 2^{16} = 65536$

$rad(A) = 6487 \qquad rad(B) = 3 \qquad rad(C) = 2$

$rad(ABC) = 6487 \times 3 \times 2 = 38922 < 65536 = 2^{16} = C$

例５

$A = 7153 \qquad B = 2^{19} = 524288 \qquad C = 3^{12} = 531441$

$rad(A) = 7153 \qquad rad(B) = 2 \qquad rad(C) = 3$

$rad(ABC) = 7153 \times 2 \times 3 = 42918 < 531441 = 3^{12} = C$